



امتحان السداسي الثاني في مقياس الميكانيك التطبيقية

في 2022/06/11
11:00—09:00

سنة ثالثة : هندسة ميكانيكية

التمرين الأول:

نقطة مادية M تنتقل في معلم ديكارتي $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، عبر مسار يوصف بالمعادلات التالية: $x = 2t$, $y = t^2$ و

$z = 0$ حيث t بالثانية (s) و x و y بالمتر (m). المطلوب:

1. أكتب معادلة المسار للنقطة M وحدد طبيعته؟
2. أكتب شعاع السرعة وأحسب طويلته.
3. أكتب شعاع التسارع وأحسب طويلته.
4. أوجد نصف قطر الانحناء ρ .

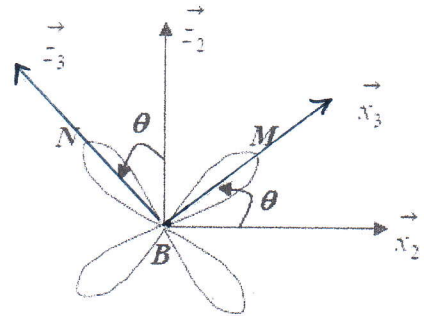
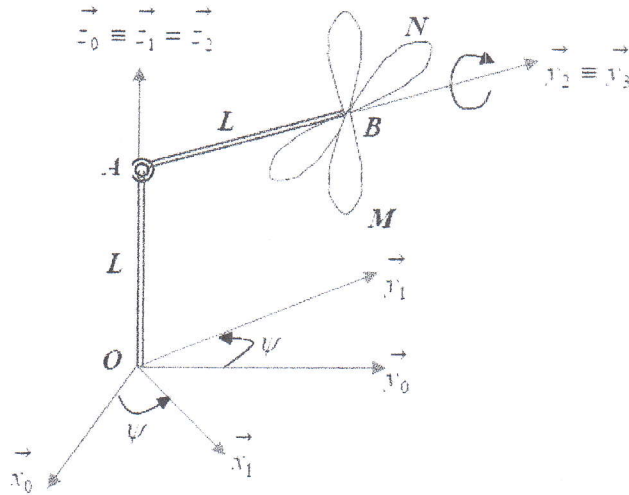
التمرين الثاني:

يكون نظام تهوية آلي من قضيبين OA و AB متماثلين ومتجانسين طول كل منهما هو L ، تم تجميعهما ببعضهما في النقطة A ومروحة نصف قطرها R .

المعلم $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ يدور بالنسبة للمعلم R_0 حول المحور $\vec{z}_0 \equiv \vec{z}_1 \equiv \vec{z}_2$ في الاتجاه الموجب.

المعلم $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ مبداه A حيث $\vec{y}_2 // \vec{y}_1$.

المعلم $R_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ يدور بالنسبة للمعلم R_2 حول المحور $\vec{y}_2 \equiv \vec{y}_3$ في الاتجاه السالب.



R_2 هو مرجع الإسقاط. و نأخذ $\dot{\theta} = Cte$ و $\dot{\psi} = Cte$. أوجد:

1. سرعة الدوران اللحظية $\vec{\Omega}_3^0$ للمعلم R_3 للمروحة بالنسبة إلى المعلم R_0 .
2. السرعة النقطة $\vec{V}^0(B)$ وتسارعها $\vec{r}^0(B)$.
3. السرعة النقطة $\vec{V}^0(M)$ للسرعة النقطة M .
4. تسارع كوريوليس للنقطة M .

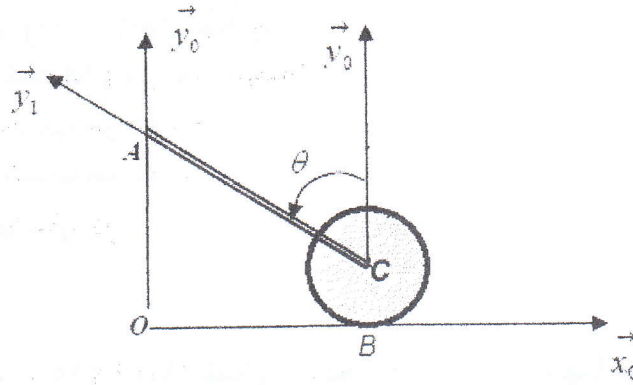
التمرين الثالث:

لدينا نظام مكون من جسمين صلبين (S1) مرتبط بالمعلم $R_1(C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ و (S2) متحرك بالنسبة للمعلم الثابت $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

(S1): عبارة عن عارضة طولها L ، تنزلق نهايتها A على الحائط والطرف الآخر B مثبت مع القرص في النقطة C ؛
(S2): قرص نصف قطره R يتدحرج بدون انزلاق على مستوى أفقي كما هو موضح في الشكل أدناه.

حدد مركز الدوران اللحظي (C.I.R) للعارضة:

1. هندسياً
2. تحليلياً بالاعتماد على سرعة النقطة C .



بالتوفيق

حل التمرين الأول:

1. كتابة معادلة المسار و تحديد طبيعته:

$$x = 2t \Rightarrow t = \frac{x}{2} \Leftrightarrow y = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow y = \frac{1}{4}x^2 \quad (0,5)$$

اذن المسار عبارة عن قطع مكافئ (0,5)

2. كتابة شعاع السرعة و حساب طويلته:

$$\vec{OM} = 2t\vec{i} + t^2\vec{j} \quad (0,5)$$

$$\vec{V}(M) = \frac{d\vec{OM}}{dt} = 2\vec{i} + 2t\vec{j} \Rightarrow V = \sqrt{4 + 4t^2} = 2\sqrt{1 + t^2} \text{ m/s} \quad (0,5)$$

3. كتابة شعاع التسارع و حساب طويلته:

$$\vec{V}(M) = 2\vec{i} + 2t\vec{j} \quad (0,5)$$

$$\vec{\gamma}(M) = \frac{d\vec{V}(M)}{dt} = 2\vec{j} \Rightarrow \gamma = 2 \text{ m/s}^2 \quad (0,5)$$

4. ايجاد نصف قطر الانحناء ρ :

لايجاد نصف قطر الانحناء يجب أولا حساب التسارع الناظمي:

$$\gamma^2 = \gamma_t^2 + \gamma_n^2 \quad \text{on } \gamma_t = \frac{dV}{dt} = 2 \frac{2t}{2(\sqrt{1+t^2})} \Rightarrow \gamma_t = \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}} \text{ m/s}^2 \quad (0,5)$$

$$\gamma_n^2 = \gamma^2 - \gamma_t^2 = 2^2 - \left(\frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 = 4 - \frac{4t^2}{1+t^2} = \frac{4+4t^2-4t^2}{1+t^2} = \frac{4}{1+t^2} \Leftrightarrow \gamma_n = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} \quad (0,5)$$

$$\gamma_n = \frac{V^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{V^2}{\gamma_n} = \frac{(2\sqrt{1+t^2})^2}{\frac{2}{\sqrt{1+t^2}}} = \frac{4(1+t^2)(1+t^2)^{1/2}}{2} \Leftrightarrow \rho = 2(1+t^2)^{3/2} \text{ m} \quad (0,5)$$

حل التمرين الثاني:

1. ايجاد السرعة الدورانية اللحظية $\vec{\Omega}_3^0$ للمعلمين R_3 بالنسبة للمعلم R_0 :

$$\vec{\Omega}_3^0 = \vec{\Omega}_1^0 + \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_3^2 = \vec{\Omega}_2^0 + \vec{\Omega}_3^2 = \dot{\psi}\vec{z}_2 + 0 - \dot{\theta}\vec{y}_2 \Rightarrow \vec{\Omega}_3^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}_{R_2} \quad (0,5)$$

2. ايجاد سرعة النقطة B بالنسبة للمعلم R_0 ($\vec{V}^0(B)$) بدلالة المعلم R_2 :

الطريقة الأولى: بالاشتقاق

$$\vec{V}^0(B) = \frac{d^0\vec{OB}}{dt} = \frac{d^2\vec{OB}}{dt} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{OB} \quad (0,5)$$

$$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} = L\vec{z}_2 + L\vec{y}_2 \Rightarrow \frac{d^2\vec{OB}}{dt} = \vec{0} \quad (0,5)$$

من جهة أخرى لدينا

$$\text{Donc } \vec{V}^0(B) = \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ L \\ L \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{V}^0(B) = \begin{pmatrix} -L\dot{\psi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (0,5)$$

$$\vec{V}^0(B) = \vec{V}^0(A) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overline{AB} \quad \text{on a } \vec{V}^0(A) = \frac{d^0 \overline{OA}}{dt} = \frac{d^0 (\overline{Lz}_2)}{dt} = 0$$

$$\vec{V}^0(B) = \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overline{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ L \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{V}^0(B) = \begin{pmatrix} -\dot{\psi} L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_2}$$

2. ب. إيجاد تسارع النقطة B بالنسبة للمعلم R₀ ($\vec{\gamma}^0(B)$) بدلالة المعلم R₂:

الطريقة الأولى: بالاشتقاق

$$\vec{\gamma}^0(B) = \vec{\gamma}^2(B) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{V}^0(B) \quad \text{avec : } \vec{\gamma}^2(B) = \frac{d\vec{V}^2(B)}{dt} = 0 \quad \text{donc } \vec{\gamma}^0(B) = \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{V}^0(B) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -L\dot{\psi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\gamma}^0(B) = \begin{pmatrix} 0 \\ -L\dot{\psi}^2 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_2}$$

الطريقة الثانية باستعمال قوانين حركات جسم صلب

$$\vec{\gamma}^0(B) = \vec{\gamma}^0(A) + \frac{d^0 \vec{\Omega}_2^0}{dt} \wedge \overline{AB} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge (\vec{\Omega}_2^0 \wedge \overline{AB}) \quad \text{avec } \vec{\gamma}^0(A) = \vec{0} \quad \text{et } \frac{d^0 \vec{\Omega}_2^0}{dt} = \frac{d^1 \vec{\Omega}_2^0}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{\Omega}_2^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\gamma}^0(B) = \vec{\Omega}_2^0 \wedge (\vec{\Omega}_2^0 \wedge \overline{AB}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ L \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -L\dot{\psi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\gamma}^0(B) = \begin{pmatrix} 0 \\ -L\dot{\psi}^2 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_2}$$

3. أ. إيجاد سرعة النقطة M ($\vec{V}^0(M)$) بدلالة المعلم R₂:

الطريقة الأولى: بالاشتقاق

$$\vec{V}^0(M) = \frac{d^0 \overline{OM}}{dt} = \frac{d^2 \overline{OM}}{dt} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overline{OM}$$

من جهة أخرى لدينا

$$\overline{OM} = \overline{OB} + \overline{BM} = L\vec{z}_2 + L\vec{y}_2 + R \cos \theta \vec{x}_2 + R \sin \theta \vec{z}_2 = \begin{pmatrix} R \cos \theta \\ L \\ L + R \sin \theta \end{pmatrix}_{R_2} \Rightarrow \frac{d^2 \overline{OM}}{dt} = \begin{pmatrix} -R\dot{\theta} \sin \theta \\ 0 \\ R\dot{\theta} \cos \theta \end{pmatrix}_{R_2}$$

$$\vec{V}^0(M) = \begin{pmatrix} -R\dot{\theta} \sin \theta \\ 0 \\ R\dot{\theta} \cos \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R \cos \theta \\ L \\ L + R \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\dot{\theta} \sin \theta \\ 0 \\ R\dot{\theta} \cos \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dot{\psi} L \\ R\dot{\psi} \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{V}^0(M) = \begin{pmatrix} -L\dot{\psi} - R\dot{\theta} \sin \theta \\ R\dot{\psi} \cos \theta \\ R\dot{\theta} \cos \theta \end{pmatrix}$$

الطريقة الثانية باستعمال قوانين حركات جسم صلب

$$\vec{V}^0(M) = \vec{V}^0(B) + \vec{\Omega}_3^0 \wedge \overline{BM} \quad \text{on a } \vec{V}^0(B) = \begin{pmatrix} -L\dot{\psi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{BM} = R\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} R \cos \theta \\ 0 \\ R \sin \theta \end{pmatrix}_{R_2} \quad \text{et } \vec{\Omega}_3^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}^0(M) = \begin{pmatrix} -L\dot{\psi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R \cos \theta \\ 0 \\ R \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L\dot{\psi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -R\dot{\theta} \sin \theta \\ R\dot{\psi} \cos \theta \\ R\dot{\theta} \cos \theta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{V}^0(M) = \begin{pmatrix} -L\dot{\psi} - R\dot{\theta} \sin \theta \\ R\dot{\psi} \cos \theta \\ R\dot{\theta} \cos \theta \end{pmatrix}_{R_2}$$

الطريقة الثالثة باستعمال قوانين تركيب السرعات

3. ب. إيجاد تسارع كوريوليس للنقطة M بالنسبة للمعلم R₀ بدلالة المعلم R₂: $\vec{\gamma}_c^0(M) = 2\Omega_2^0 \wedge \vec{V}^2(M)$

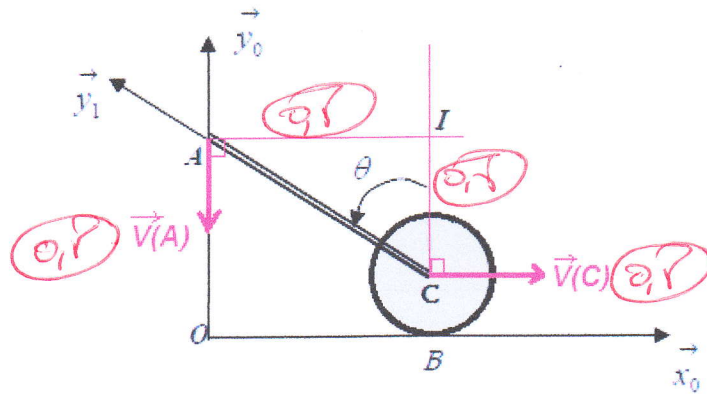
$$\vec{V}^2(M) = \frac{d^2 \overline{BM}}{dt} = \frac{d^3 \overline{BM}}{dt} + \vec{\Omega}_3^2 \wedge \overline{BM} \quad \text{avec} \quad \overline{BM} = R\vec{x}_3 \Rightarrow \frac{d^3 \overline{BM}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\Omega}_3^2 \wedge \overline{BM} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R \cos \theta \\ 0 \\ R \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\dot{\theta} \sin \theta \\ 0 \\ R\dot{\theta} \cos \theta \end{pmatrix}_{R_2} \quad \text{donc} \quad \vec{V}^2(M) = \begin{pmatrix} -R\dot{\theta} \sin \theta \\ 0 \\ R\dot{\theta} \cos \theta \end{pmatrix}_{R_2}$$

$$\vec{\gamma}_c^0(M) = 2\Omega_2^0 \wedge \vec{V}^2(M) = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -R\dot{\theta} \sin \theta \\ 0 \\ R\dot{\theta} \cos \theta \end{pmatrix}_{R_2} \Leftrightarrow \vec{\gamma}_c^0(M) = \begin{pmatrix} 0 \\ -R\dot{\psi}\dot{\theta} \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

حل التمرين الثالث:

1. تحديد مركز الدوران اللحظي (C.I.R) للعارضة هندسيا:



$$\overline{OI} = \overline{OB} + \overline{BI} = \overline{AI} + \overline{BI} = L \sin \theta \vec{i} + (R + L \cos \theta) \vec{j}$$

2. تحديد مركز الدوران اللحظي (C.I.R) للعارضة تحليليا:

$$\vec{V}(C) = \vec{V}(I) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overline{IC}$$

$$\vec{V}^0(C) = \frac{d^0 \overline{OC}}{dt} \quad \text{on a:} \quad \overline{OC} = L \sin \theta \vec{x}_0 + R \vec{y}_0 \quad \text{donc} \quad \vec{V}^0(C) = \begin{pmatrix} L\dot{\theta} \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\Omega}_1^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

$$\overline{IC} = \begin{pmatrix} L \sin \theta - X_I \\ R - Y_I \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}(C) = \vec{V}(I) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overline{IC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} L\dot{\theta} \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} L \sin \theta - X_I \\ R - Y_I \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} L\dot{\theta} \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}R + \dot{\theta}Y_I \\ L\dot{\theta} \sin \theta - \dot{\theta}X_I \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} L\dot{\theta} \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}R + \dot{\theta}Y_I \\ L\dot{\theta} \sin \theta - \dot{\theta}X_I \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} L\dot{\theta} \cos \theta = -\dot{\theta}R + \dot{\theta}Y_I \\ 0 = L\dot{\theta} \sin \theta - \dot{\theta}X_I \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_I = L \sin \theta \\ Y_I = R + L \cos \theta \\ 0 = 0 \end{cases}$$